УДК 517.958

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ВЫСОКО-ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ С МНОГОЗНАЧНЫМ ЗАКОНОМ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ[1)]

И.Б. БАДРИЕВ[1], М.Т. СИНГАТУЛЛИН[1], Ю.В. ЧЕБАКОВ[2]

[1] *Казанский (Приволжский) федеральный университет,*
[2] *Усольский сельскохозяйственный техникум, Самарская обл., с. Усолье*
E-mail: ildar.badriev@kpfu.ru, yshk_chebakov@mail.ru

NUMERICAL SIMULATION THE STEADY FILTRATION OF HIGH-VISCOSITY FLUIDS WITH MULTI-VALUED LAW IN POROUS MEDIA

I.B. BADRIEV[1], M.T. SINGATULLIN[1], Yu.V. CHEBAKOV[2]

[1] *Kazan Federal University,* [2] *Usolskiy Agricultural College, Russia, Samara region, Usol'e*

Аннотация

Проведено численное моделирование установившегося процесса фильтрации несжимаемой высоко-вязкой жидкости, следующей нелинейному многозначному закону фильтрации. Обобщенная постановка данной задачи сформулирована в виде смешанного вариационного неравенства с монотонным оператором и недифференцируемым функционалом в гильбертовом пространстве. Для решения этого вариационного неравенства предложен итерационный метод расщепления, не требующий обращения исходного оператора. Каждый шаг итерационного процесса сводится к решению краевой задачи для уравнения Лапласа. Этот метод был реализован численно. Результаты численных экспериментов, проведенных для модельных задач, подтвердили эффективность предложенного итерационного метода.

Ключевые слова: Математическое моделирование, установившаяся фильтрация, вариационное неравенство, монотонный оператор, итерационный метод, численный эксперимент.

Summary

The numerical simulation of the steady filtration process of the incompressible high-viscosity fluid, following non-linear multi-valued filtration law is carried out. Generalized statement of this problem is formulated in the form of mixed variational inequality with monotone operator and non differentiable functional in Hilbert space. To solve this variational inequality, we suggest splitting iterative method that does not require the inversion of the original operator. Each step of the iterative process can essentially be reduced to the solution of the boundary-value problem for the Laplace operator. This method was realized numerically. The numerical experiments made for the model problems confirmed the efficiency of the iterative method.

Key words: Mathematical simulation, steady filtration, variational inequality, monotone operator, iterative method, numerical experiment.

Введение

Изучаются установившиеся процессы подземной фильтрации несжимаемых высоковязких жидкостей, следующих многозначным законам фильтрации с предельным градиентом [1, 4, 5]. Обобщенные

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00955, 12-01-97022)

постановки задач формулируется в виде смешанных вариационных неравенств с обратно сильно монотонным оператором [6] и выпуклым, липшиц-непрерывным, вообще говоря, недифференцируемым, функционалом. К указанным задачам сводятся задачи об определении границ предельно-равновесных целиков остаточной вязко-пластической нефти [7, 8].

Для решения вариационных неравенств с операторами монотонного типа предложен итерационный метод расщепления [9, 10], не требующий обращения исходного оператора. Основную трудность при этом представляет решение возникающих на каждой итерации задач минимизации. В случае задач фильтрации эту задачу удалось решить в явном виде благодаря тому, что можно эффективно вычислить субдифференциал функционала, сопряженного к минимизируемому. При этом каждый шаг итерационного процесса сводится фактически к решению краевой задачи для оператора Лапласа.

Был разработан комплекс программ в среде MatLab. Проведены численные эксперименты для модельных задач. Исследована зависимость границ застойных зон (множеств в области фильтрации, где модуль градиента давления меньше предельного, т.е. движение фильтрующейся жидкости отсутствует) от величины скачка в многозначном законе фильтрации.

1. Постановка задачи.

Рассматривается установившийся процесс фильтрации несжимаемой высоко-вязкой жидкости в пористой среде, занимающей ограниченную область $\Omega \subset R^m$, $m \geqslant 2$, с липшиц-непрерывной границей $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, ($\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset$, $\operatorname{mes} \Gamma_1 > 0$, на Γ_1 давление считается равным нулю, Γ_2 — непроницаема).

Необходимо найти стационарные поля давления u и скорости v жидкости, удовлетворяющие уравнению неразрывности и граничным условиям

$$\operatorname{div} v(x) = \tilde{f}(x),\ x \in \Omega, \quad u(x) = 0,\ x \in \Gamma_1, \quad (v(x), \mathbf{n}) = 0,\ x \in \Gamma_2, \tag{1}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к Γ_2, $\tilde{f}$ — функция, характеризующая плотность внешних источников, в предположении, что жидкость подчиняется многозначному закону фильтрации

$$-v(x) \in \frac{g(|\nabla u(x)|\,)}{|\nabla u(x)|}\, \nabla u(x),\ x \in \Omega, \quad g(\xi) = g_0(\xi) + \vartheta H(\xi - \beta),\ \xi \in R^1, \tag{2}$$

где β (предельный градиент) и ϑ — заданные неотрицательные константы, g_0 — однозначная функция такая, что $g_0(\xi) = 0$, $\xi < \beta$, $g_0(\xi) = \widehat{g}(\xi - \beta)$, $\xi \geqslant \beta$, H — многозначная функция Хевисайда, определяемая следующим образом: $H(\xi) = 0$, $\xi < 0$, $H(0) = [0, 1]$, $H(\xi) = 1$, $\xi > 0$.

Относительно функции $\widehat{g} : [0, +\infty) \to R^1$ предполагаются выполненными условия:

$$\widehat{g_0} \ \text{ непрерывна, возрастает,} \tag{3}$$

существуют c_1, $c_2 > 0$, такие, что при $\xi \geqslant 0$

$$c_1\, \xi \leqslant \widehat{g_0}(\xi) \leqslant c_2\, \xi, \tag{4}$$

Обозначим $V = \big\{ u \in W_2^1(\Omega) : u(x) = 0,\ x \in \Gamma_1 \big\}$, $Y = [L_2(\Omega)]^m$, $(\cdot,\cdot)_V$, $(\cdot,\cdot)_Y$ — скалярные произведения в V и Y соответственно. Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию $u \in V$, являющуюся решением вариационного неравенства [1–3]

$$(A\eta - f, \eta - u)_V + F(\eta) - F(u) \geqslant 0 \quad \forall\, \eta \in V, \tag{5}$$

где

$$(Au, \eta)_V = \int\limits_\Omega \frac{g_0(|\nabla u|\,)}{|\nabla u|}\, (\nabla u, \nabla \eta) dx,\ F(\eta) = G(\nabla \eta) = \vartheta \int\limits_\Omega \mu(|\nabla \eta| - \beta) dx,$$

$$\mu(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta < 0, \\ \zeta, & \zeta \geqslant 0, \end{cases} \qquad (f, \eta)_V = \int\limits_\Omega \tilde{f}(x) \eta(x) dx.$$

Справедива (см. [1, 11]) следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3), (4). *Тогда вариационное неравенство* (5) *имеет по крайней мере одно решение.*

2. Итерационный метод. Численные эксперименты.

Для решения вариационного неравенства (5) будем применять следующий итерационный метод расщепления [9, 10]. Пусть $u^{(0)} \in V$ – произвольный элемент, полагаем $y^{(0)} = \Lambda u^{(0)}$, $\Lambda = \nabla : V \to Y$, находим $\lambda^{(0)} \in \partial G(u^{(0)})$. Определим последовательности $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$, $\{y^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$, $\{\lambda^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$ следующим образом. Для $k = 0, 1, \ldots$

1) Найдем элемент u_{k+1} как решение задачи

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \tau \left[Au^{(k)} - f + \Lambda^* \lambda^{(k)} + r\, u^{(k)} - r\, \Lambda^* y^{(k)}\right], \tag{6}$$

где оператор $\Lambda^* : Y \to V$ определен следующим образом: $(\Lambda^* y, \eta)_V = (y, \Lambda \eta)_Y$ для всех $y \in Y$, $\eta \in V$, $\tau > 0$, $r > 0$ – итерационные параметры.

2) Затем находим элемент $y^{(k+1)}$, решая задачу минимизации

$$(r\Lambda u^{(k+1)} + \lambda^{(k)}, z - y^{(k+1)})_Y \leqslant G_r(z) - G_r(y^{(k+1)})\ \forall\, z \in Y,\ G_r(z) = G(z) + \frac{r}{2}\ \|z\|_Y^2 \tag{7}$$

3) Далее, находим элемент

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + r\left(\Lambda u^{(k+1)} - y^{(k+1)}\right). \tag{8}$$

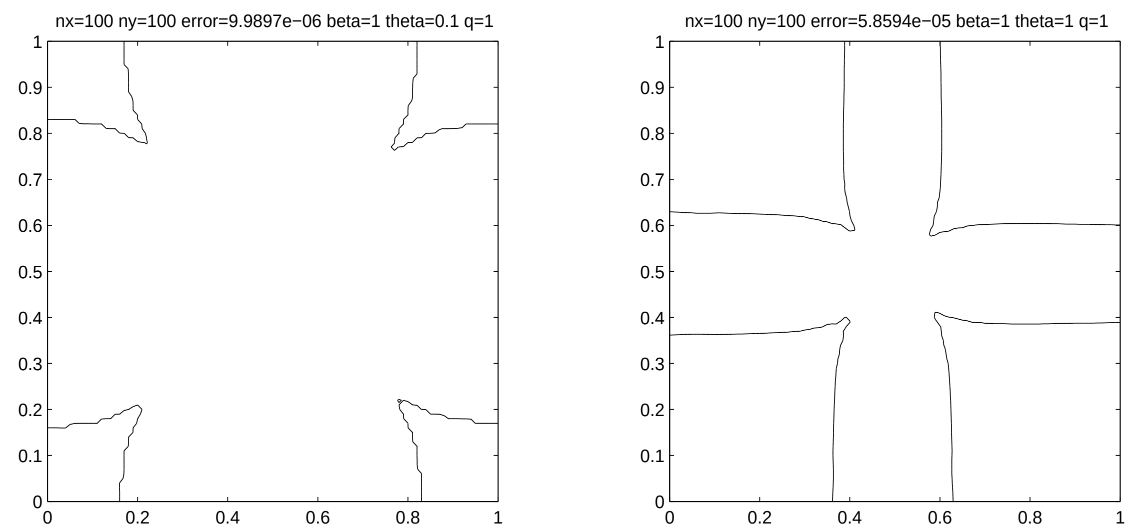

Рис. 1: Застойные зоны при $\vartheta = 0.1$ и $\vartheta = 1$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3), (4), *функция g_0 липшиц-непрерывна, с постоянной c_3, $0 < \tau < 2\,c_3/(2\,c_3\, r + 1)$, итерационные последовательности $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$, $\{y^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$, $\{\lambda^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$ построенны согласно* (6)–(8). *Тогда эти последовательности сходятся слабо в $V \times Y \times Y$ при $k \to +\infty$ к $(u^*, y^*, \lambda^*$, где u^* – решение задачи* (5), *$y^* = \Lambda u^*$, $\lambda^* \in \partial G(y^*)$, и справедливо равенство $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|y^{(k)} - \Lambda u^{(k)}\right\|_Y = 0$.*

Для определения $u^{(k+1)}$ из (6) необходимо сначала решить краевую задачу

$$\begin{cases} -\Delta w = f - Au^{(k)} + \operatorname{div}(\lambda^{(k)} - ru^{(k)}) + r\,\Delta u^{(k)}, & x \in \Omega, \\ w(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad (w(x), \mathbf{n}) = 0, & x \in \Gamma_2. \end{cases}$$

а затем положить $u^{(k+1)} = u^{(k)} + \tau\, w$.

Решение задачи (7) может быть найдено по формуле [12]

$$y^{(k+1)} = \frac{g_r^*(|q|)}{|q|}\, q, \; g_r^*(\xi) = \begin{cases} \xi/r, & \xi \leqslant r\,\beta, \\ \beta, & r\,\beta < \xi \leqslant r\,\beta + \vartheta, \\ (\xi - \vartheta)/r, & \xi > r\,\beta + \vartheta. \end{cases}$$

где $q = r\,\Lambda u^{(k+1)} + \lambda^{(k)}$.

Был разработан комплекс программ в среде MatLab. Проведены численные эксперименты для модельных задач. Эмпирически определялись оптимальные (по количеству итераций) итерационные параметры $\tau > 0$, $r > 0$. Исследовано поведение границ застойных зон (множеств в области фильтрации, где модуль градиента давления меньше предельного, т.е. движение фильтрующейся жидкости отсутствует) от величины скачка в многозначном законе фильтрации (2).

На рис. 1 приведены границы застойных зон в случае фильтрации в квадратном единичном пласте при наличии скважины с дебитом $q = 1$ в центре пласта, $\Gamma = \Gamma_1$, то есть на границе пласта давление рано нулю. Значение предельного градиента β равно 1, значение θ величины скачка в многозначном законе фильтрации менялись от 0.1 до 1. Как видно из рисунков, застойные зоны при этом увеличиваются, что соответствует физике моделируемого явления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lapin A.V.** Investigation of Some Non-linear Problems of Filtering Theory // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1979. – V. 19, № 3. – P. 135–148.
2. **Badriyev I.B., Zadvornov O.A., Ismagilov L.N., Skvortsov E.V.** Solution of plane seepage problems for a multivalued law when there is a point source // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2009. – V. 73. – P. 434-442.
3. **Badriev I.B., Zadvornov O.A., Lyashko A.D.** A Study of Variable Step Iterative Methods for Variational Inequalities of the Second Kind // Differential Equations. – 2004. – V. 40, № 7. – P. 971–983.
4. **Badriev I.B.** On the solving of variational inequalities of stationary problems of two-phase flow in porous media // Applied Mechanics and Materials. – 2013. – V. 392. – P. 183–187.
5. **Бадриев И.Б., Нечаева Л.А.** Математическое моделирование установившейся фильтрации с многозначным законом // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 3. – С. 35–62.
6. **Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.** Модифицированные функции Лагранжа. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
7. **Entov V.M. and Pan'ko S.V.** Variational Formulation of the Problem of Retained Viscoplastic Oil // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1984. – V. 48, Is. 6. – P. 707–712.
8. **Ентов В.М., Панков В.Н., Панько С.В.** Математическая теория целиков остаточной вязкопластичной нефти. – Томск: Изд-во Томского государственного университета, 1989. – 196 с.
9. **Badriev I.B. and Zadvornov O.A.** A Decomposition Method for Variational Inequalities of the Second Kind with Strongly Inverse-Monotone Operators // Differential Equations. – 2003. – V. 39, № 7. – P. 936–944.
10. **Badriev I.B. and Zadvornov O.A.** On the convergence of the dual-type iterative method for mixed variational inequalities Source // Differential Equations. – 2006. – V. 42, № 8. – P. 1180–1188.
11. **Karchevskii M.M. and Badriev I.B.** Nonlinear Problems of Filtration Theory with Discontinuous Monotone Operators // Numerical Methods in Continuum Mechanics. – Novosibirsk, 1979. – V. 10, № 5. – P. 63–78.
12. **Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Исмагилов Л.Н.** Применение метода декомпозиции для численного решения некоторых нелинейных стационарных задач теории фильтрации // Исследования по

прикладной математике и информатике. – Казань: Казанский государственный университет, 2003. – Вып. 24. – С. 12–24.

REFERENCES

1. **Lapin A.V.** Investigation of Some Non-linear Problems of Filtering Theory // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1979. – V. 19, № 3. – P. 135–148.
2. **Badriyev I.B., Zadvornov O.A., Ismagilov L.N., Skvortsov E.V.** Solution of plane seepage problems for a multivalued law when there is a point source // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2009. – V. 73. – P. 434-442.
3. **Badriev I.B., Zadvornov O.A., Lyashko A.D.** A Study of Variable Step Iterative Methods for Variational Inequalities of the Second Kind // Differential Equations. – 2004. – V. 40, № 7. – P. 971–983.
4. **Badriev I.B.** On the solving of variational inequalities of stationary problems of two-phase flow in porous media // Applied Mechanics and Materials. – 2013. – V. 392. – P. 183–187.
5. **Badriev I.B., Nechaeva L.A.** Mathematical simulation of steady filtration with multivalued law // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2013. – № 3. – P. 37–65.
6. **Gol'shtein E.G. and Tret'yakov N.V.** Modified Lagrangians [Moditsirovannye funktsii Lagranzha]. – Moscow: Nauka, 1989. – 400 p. (in Russian)
7. **Entov V.M. and Pan'ko S.V.** Variational Formulation of the Problem of Retained Viscoplastic Oil // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1984. – V. 48, Is. 6. – P. 707–712.
8. **Entov V.M., Pankov V.N. and Pan'ko S.V.** Mathematical Theory of Unrecovered Visco-Plastic Oil [Matematicheskaya teoriya tselikov ostatochnoi vyazkoplastichnoi nefti]. – Tomsk, 1989. – 196 p. (in Russian)
9. **Badriev I.B. and Zadvornov O.A.** A Decomposition Method for Variational Inequalities of the Second Kind with Strongly Inverse-Monotone Operators // Differential Equations. – 2003. – V. 39, № 7. – P. 936–944.
10. **Badriev I.B. and Zadvornov O.A.** On the convergence of the dual-type iterative method for mixed variational inequalities Source // Differential Equations. – 2006. – V. 42, № 8. – P. 1180-1188.
11. **Karchevskii M.M. and Badriev I.B.** Nonlinear Problems of Filtration Theory with Discontinuous Monotone Operators// Numerical Methods in Continuum Mechanics. – Novosibirsk, 1979. – V. 10, № 5. – P. 63–78.
12. **Badriev I.B., Zadvornov O.A. and Ismagilov L.N.** The Use of the Decomposition Method for the Numerical Solution of Some Nonlinear Steady-State Problems of Filtration Theory [Primenenie metoda dekompozicii dlya chislennogo resheniya nekotorykh nelineynykh stacionarnykh zadach teorii filtracii]// Investigations on Applied Mathematics and Computer Science [Issledovaniya po prikladnoi matematike i informatike]. – Kazan, 2003. – Is. 24. – P. 12–24. (in Russian)